S E S   2 0 1 0
Sixth Scientific Conference with International Participation
SPACE, ECOLOGY, SAFETY
2–4 November 2010, Sofia, Bulgaria

НЕЛИНЕЙНИ ЯВЛЕНИЯ ПРИ КОЛЕБАНИЕТО НА ЕКВАТОРИАЛЕН СПЪТНИК

Костадин Шейретски, Деян Гочев, Пламен Тренчев

Резюме: *Разглежда се екваториален спътник като твърдо тяло. Анализирано е влиянието на сплеснатостта на планетата върху колебанията на спътника. Изведени са уравненията на движението в най-обща форма. Аналитично са изследвани резонансите при отчитане на нелинейността на системата.*

1. Уравнения на движението

Разглеждаме екваториалния спътник като твърдо тяло. Анализираме влиянието на сплеснатостта на планетата върху колебанията на спътника.

Определяме положението на центъра на масите O' посредством полярни координати R, φ, с център на к.с. O съвпадащ със силовия център, а положението на една от централните оси на инерция на тялото спрямо радиусвектора отбелязваме с ъгъл Θ

Уравнението на въртеливото движение в случая на екваториална орбита е

$$B\frac{d}{dt}\left(\dot{\Theta}+\dot{\varphi}\right)+\frac{\mu}{R^3}\left(A-C\right)\left[3+5\frac{3\alpha}{kR^2}\right]\sin\Theta\cos\Theta=0 . \tag{1}$$

С точки са означени производните на величините по времето

В общият случай се отчита и връзката между колебателното (ротационното) движение и орбиталното движение. Изразът за разстоянието от спътника до централното тяло има вида.

$$R=R_0\sqrt{1-\frac{B}{MR_0{}^2}\left(1+n_0\theta'\right)},\ R_0=\sqrt{\frac{L}{M\dot{\varphi}}},\ \text{където}\ n_0=\sqrt{1-\frac{6\alpha}{kp^2}}\ \text{и}\ \frac{km}{L^2}\equiv\frac{1}{p} \tag{2}$$

(връзка между константи дефинирани по-нататък в уравнение (3))

Производната по ъгъл $\nu\equiv n_0\varphi$ е означена отново с щрих. Трансформираме уравнението (1) така, че да го преведем към новата независима променлива ν. След несложни изчисления се достига до израза

$$\frac{p}{R_0(\nu)}\theta''-2p\frac{R_0'(\nu)}{R_0{}^2(\nu)}\theta'+\frac{(A-C)}{2Bn_0{}^2\left[1-\frac{B}{MR_0{}^2}\left(1+n_0\theta'\right)\right]^{\frac{3}{2}}}\left[3+\frac{5p^2}{2R_0{}^2(\nu)\left[1-\frac{B}{MR_0{}^2}\left(1+n_0\theta'\right)\right]}\left(1-n_0{}^2\right)\right]\sin 2\theta=$$
$$=\frac{2p}{n_0}\frac{R_0'(\nu)}{R_0{}^2(\nu)},$$

изразявам разстоянието до силовия център R_0 като функция на полярния ъгъл φ в уравнението за запазване на енергията в непертурбираната задача:

$$\frac{1}{2}\frac{L^2}{mR_0{}^4}\left[\left(\frac{dR_0}{d\varphi}\right)^2+R_0{}^2\right]-\frac{k}{R_0}-\frac{\alpha}{R_0{}^3}=E . \tag{3}$$

Като се използват асимптотични методи за решаване, се достига до израза:

(4) $$R_0(\nu) = \frac{p}{1 + \frac{3\alpha}{kp^2} + \frac{18\alpha^2}{p^4k^2} + e\cos\nu + \frac{\alpha e^2}{2kp^2}\cos 2\nu - \frac{3\alpha}{kp^2}\frac{e^2}{2} + \dots}.$$

В $R(\nu)$ се подбират необходимият брой членове, в зависимост от приближението, в което се разглежда задачата. Ограничаваме задачата до случая, когато връзката между орбиталния и ротационния моменти може да се пренебрегне $(R = R_0)$. Приближението, което избираме по малките параметри, е до вторите степени включително. Тогава уравнението добива формата

(5) $$n_0(1 + en_0\cos\nu)\theta'' - 2en_0^2\sin\nu\theta' + \frac{(A-C)}{2B}\left[3 + \frac{5(1-n_0^2)}{2n_0^2}(1 + n_0 e\cos\nu)^2\right]\sin 2\theta = 2en_0\sin\nu.$$

Разглеждаме малки стойности на колебанията на спътника. Въвеждаме нова променлива z свързана с θ чрез съотношението

(6) $$z = \frac{p}{R}\theta.$$

Диференцираме по ъгъл ν и заместваме в уравнение (5)

(7) $$z'' + \left\{\frac{3(A-C)R}{n_0^2 Bp}\left[1 + \frac{5p^2}{6R^2(\nu)}(1-n_0^2)\right] - \frac{2R'^2(\nu)}{R^2(\nu)} + \frac{R''(\nu)}{R(\nu)}\right\}z = 2p\frac{R'(\nu)}{n_0 R^2(\nu)}.$$

В случая, когато се вземат под внимание само първите степени по малките параметри се стига до уравнение от типа на Хил

(8) $$z'' + \frac{\frac{3(A-C)}{Bn_0} + n_0 e\cos\nu}{1 + n_0 e\cos\nu}z = \frac{2e}{n_0}\sin\nu.$$

За да определим приближено колебанията, съобразяваме, че уравнение (8) може да се запише по следният начин до точността с която работим

(9) $$z'' + \varpi^2 z = \frac{2e}{n_0}\sin\nu,$$

където $\varpi^2 = \dfrac{3(A-C)}{2Bn_0}$.

Ако пренебрегнем втория член в дясната страна на (9), можем веднага да получим принудените колебания във вида

(10) $$z = \frac{2e}{n_0(\varpi^2 - 1)}\sin\nu.$$

От уравнение (10) следва, че резонанс настъпва когато $\dfrac{3(A-C)}{B} \approx n_0$, ако не отчитаме сплеснатостта на планетата се достига до познатият ни резултат $\dfrac{3(A-C)}{B} \approx 1$.

Разглеждаме уравнението на Ойлер (1). Въвеждаме променливата

$$\psi \equiv \varphi + \theta - \omega,$$

където $\omega \equiv \dfrac{3\alpha}{kp^2}M$.

Заместваме в уравнението, като използваме и формулата за зависимостта на полярния ъгъл от времето. В резултат получаваме израза

$$\frac{d^2\psi}{dM^2}+\Omega^2 n_0\left\{\sin 2(\psi-M)+\left(\frac{3}{2}n_0-2\right)e\sin(2\psi-M)+\left(\frac{3}{2}n_0+2\right)e\sin(2\psi-3M)\right\}+$$

$$(11)\qquad +\Omega^2\frac{5\left(1-n_0{}^2\right)}{6n_0}\left\{\sin 2(\psi-M)+\left(\frac{5}{2}n_0-2\right)e\sin(2\psi-M)+\left(\frac{5}{2}n_0+2\right)e\sin(2\psi-3M)\right\}+$$

$$+\Omega^2 e^2\left\{-\frac{5}{2}\sin 2(\psi-M)+\frac{17}{2}\sin(2\psi-4M)+\right\}+O\left(\alpha e^2\right)=0,\Omega^2=\frac{3(A-C)}{2Bn_0{}^2}.$$

2. Резонансни движения

За да разгледаме резонансната динамика на екваториален спътник, ще използваме методът на осредняването. Разглеждаме уравнение (11). Въвеждаме променливата

(12) $\dfrac{d\psi}{dM}=\dfrac{k}{2}+\dfrac{d\delta}{dM}$, където $k\in Z$, $|\delta|<<1$.

Извършваме осредняване по „бързата" променлива M и достигаме до уравнение на махалото

(13) $\dfrac{d^2 2\delta}{dM^2}+2\Omega^2 F_k(e,n)\sin 2\delta=0$.

В случаите, когато $\Omega^2>0$ и $F(e,n)>0$, или $\Omega^2<0$, $F(e,n)<0$, уравнението (13) има устойчиви положения на равновесие $\delta=l\pi, l\in Z$. Конкретните стойности за $F(e,n)$, съответстващи на определен тип резонанс (без да се разглеждат обратни движения), са:

$$F_1(e,n)=n_0 e\left(\frac{3}{2}n_0-2\right)+e\frac{5\left(1-n_0{}^2\right)}{6n_0}\left(\frac{5}{2}n_0-2\right)+\ldots,$$

$$(14)\qquad F_2(e,n)=n_0+\frac{5\left(1-n_0{}^2\right)}{6n_0}-\frac{5}{2}e^2+\ldots$$

$$F_3(e,n)=n_0 e\left(\frac{3}{2}n_0+2\right)+e\frac{5\left(1-n_0{}^2\right)}{6n_0}\left(\frac{5}{2}n_0+2\right)+\ldots,$$

$$F_4(e,n)=\frac{17e^2}{2}+\ldots$$

Уравнението (13) има следния интеграл

(15) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d\delta}{dM}\right)^2+\Omega^2 F_k(e,n)\sin 2\delta=K=const.$.

От интеграла на движението (15) лесно се съобразява, че полуширината на резонансните зони се определя от формулата

(16) $\Delta=\sqrt{2\Omega^2 F_k(e,n)}$.

От представените резултати е ясно, че при стойности на k по-малки от 5 (играещи най-съществена роля), устойчивостта на резонансите е в аналогия с резултатите получени без отчитане на сплеснатостта на централното тяло, но има съществени различия в полуширините на резонансите.

Параметричен резонанс настъпва, когато коефициентът пред синусовата функция е приблизително равен на $\dfrac{1}{4}$. Търсим първата хармоника на колебанията в областта на параметричният резонанс на уравнение (13) във вида

(17) $2\theta=a\cos\left(\dfrac{n_0}{2}\varphi+\varphi_0\right)$.

Като заместим в уравнението и приравним коефициентите пред еднаквите хармоници, се получават два случая

(18) $$\sin\varphi_0 = 0,\quad 3\frac{A-C}{B} \equiv \Omega^2 = n_0{}^2 a \frac{\frac{1}{4}+\frac{3\alpha}{4kp^2}-\frac{3}{8}e}{2J_1(a)\left(1+\frac{5\alpha}{kp^2}\right)};$$

(19) $$\cos\varphi_0 = 0,\quad \Omega^2 = n_0{}^2 a \frac{\frac{1}{4}+\frac{3\alpha}{4kp^2}+\frac{3}{8}e}{2J_1(a)\left(1+\frac{5\alpha}{kp^2}\right)},$$

където $J_1(a)$ е беселова функция от първи род.

Амплитудата еднозначно се определя в областта

(20) $$\frac{1}{4}+\frac{3\alpha}{4kp^2}-\frac{3}{8}e \le \Omega^2 \le \frac{1}{4}+\frac{3\alpha}{4kp^2}+\frac{3}{8}e.$$

От формулата става ясно, че резонансният интервал има големина равна на тази без отчитане на сплеснатостта на планетата. Разликата е, че е изместен надясно по числовата ос.

3. Заключение

Като се отчита формата на спътника и са изведени уравненията на колебателното (въртеливото) движение. Разгледани са аналитично получаващите се принудени колебания на спътника в нерезонансен и резонансен режим.

Направеният анализ до тук се базира на ограниченото разглеждане на поставените задачи, без отчитане на връзката между орбиталното и колебателното движение. Когато тялото се движи в нютоново централно поле на силите и не се разглежда като материална точка, а като твърдо тяло с краен размер, тогава строго погледнато постъпателното и въртеливото движение са свързани. Като следствие центърът на масите се движи не по кеплерова орбита.

Литература:

1. Б е л е ц к и й, В. В. Движение искусственого спутника относительно центра масс . Москва, Наука, 1965.
2. Б е л е ц к и й, В. В., О. Н. П о н о м а р е в а. Параметрический анализ устойчивисти относительного равновесия в гравитационном поле. Космические исследования, т.28, в. 5, 1990.
3. L i c h t e n b e r g, A. J., M. A. L i e b e r m a n. Regular and stochastic motion. Springer-Verlag New York Inc. 1983.